1. Interés simple y compuesto

Imagínese que dos personas A y B invierten al mismo tiempo un capital C, con una misma tasa de interés i. Al cabo de un año, A retira los intereses producidos por el capital y vuelve a dejar el mismo capital invertido. En el segundo año, vuelve a retirar los intereses y a invertir el mismo capital, y así cada año. Cada año retira los intereses producidos durante ese año y reinvierte sólo el capital C. En cambio B, al cabo del primer año no retira el interés, sino que lo invierte junto con el capital anterior durante un año más, y así sucesivamente. En el primer caso, los intereses producidos son siempre por el mismo capital C, mientras que en el caso de B, el capital varía aumentando año con año.

El **interés simple** es el que se obtiene cuando los intereses producidos, durante todo el tiempo que dure una inversión, se deben únicamente al capital inicial. En el ejemplo anterior, el interés de la persona A es un interés simple.

Interés compuesto es el que se obtiene cuando al capital se le suman periódicamente los intereses producidos. Así al final de cada periodo el capital que se tiene es el capital anterior más los intereses producidos por ese capital durante dicho periodo. Al capital existente en cada momento, le llamamos **montante**. El interés de B en el ejemplo anterior es un interés compuesto.
Cuando no devengamos los intereses en los distintos periodos de tiempo sino que éstos se van sumando al capital, hemos colocado el capital a interés compuesto, a este proceso le llamamos **capitalización**.

1.0.1. Fórmula del interés simple

Un capital (**C**) colocado al **R** % (rédito, ganancia que producen 100 € en un año) en un año porduce de interés (**I**) en **t** años:

$$\boxed{I = \frac{CRt}{100} = Crt}$$

r es la ganancia que produce 1€ en un año, $r = \dfrac{R}{100}$.

1.0.2. Fórmula del interés compuesto

Un capital (**C**) colocado al tanto por uno **r** porduce el siguiente montante (**M**) al cabo de **t** años:

$$\boxed{M = C(1+r)^t}$$

Cuando capitalizamos **n** veces al año o en **n** períodos cada año obtenomos un montante de:

$$\boxed{M = C\left(1 + \frac{r}{n}\right)^T}$$

siendo **T** el número de períodos.

1.1. Ejemplos

⋆ Un capital de 300000 € invertido a una tasa de interés del $8\,\%$ durante un cierto tiempo ha generado unos intereses de 12000 € . ¿Cuánto tiempo ha estado invertido?

Aplicando la fórmula, se tiene que $12000 = 30000 \cdot 0'08 \cdot t$,
despejando $t = \dfrac{12000}{30000 \cdot 0'08} = 0'5$
Por lo que el tiempo que ha estado invertido es de $0'5$ años, es decir, **6 meses**.

⋆ Un préstamo de 20000 € se convierte al cabo de un año en 22400 € . ¿Cuál es el interés cobrado?

Los intereses han ascendido a $22400 - 20000 = 2400$, aplicando la fórmula
$2400 = 20000 \cdot r \cdot 1 \Rightarrow r = \dfrac{2400}{20000} = 0'12$
El interés es del $12\,\%$.

⋆ Averiguar en qué se convierte un capital de 12000 € al cabo de 5 años y a una tasa de interés compuesto anual del $8\,\%$.

Aplicando la fórmula $M = C(1+r)^t$, tenemos que $M = 12000 \cdot (1 + 0.08)^5 = 17631.94$€ .
Por tanto el **montante al cabo de 5 años es de** 17631.94€ .

⋆ Un cierto capital invertido durante 7 años a una tasa de interés compuesto anual del $10\,\%$ se ha convertido en $15839'45$€ . Calcular el capital inicial sabiendo que los intereses se han pagado semestralmente.

Utilizaremos la fórmula $M = C\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^T$,
$n = 2$ porque los intereses se pagan cada 6 meses.
T es el número de periodos, en este caso $T = 14$. Por tanto,
$15839'45 = C \cdot \left(1 + \dfrac{0'1}{2}\right)^{14} = C \cdot (1'05)^{14} \Rightarrow C = \dfrac{15839'45}{(1'05)^{14}} = 7999'998588\ldots = 8000$
Capital inicial $=$ 8000€

⋆ Calcular el interés compuesto anual que se ha aplicado a un capital de 15000 € para que al cabo de 4 años se haya convertido en 23602'79 € .

Aplicando la fórmula $M = C(1+r)^t$, tenemos que $23602'79 = 15000 \cdot (1+r)^4$
$(1+r)^4 = \dfrac{23602'79}{15000} \Rightarrow 1 + r = \sqrt[4]{\dfrac{23602'79}{15000}} \Rightarrow r = \sqrt[4]{\dfrac{23602'79}{15000}} - 1 = 0'12$
El interés ha sido del $12\,\%$.

⋆ Durante cuántos años estuvieron impuestas $3\,606'6$€ , al tanto nominal $3'9608\,\%$ capitalizable semestralmente, si alcanzó un montante de $4\,745'34$€ .
Aplicando la fórmula $M = C(1+r)^t$, tenemos que $4\,745'34 = 3\,606'6 \cdot (1 + 0'039608)^t$.
Tomando logaritmos y aplicando las propiedades de los logaritmos se tiene que,
$\log 4\,745'34 = \log\left(3\,606'6 \cdot (1 + 0'039608)^t\right) \Rightarrow \log 4\,745'34 = \log 3\,606'6 + t\log(1'039608)$
$t = \dfrac{\log 4\,745'34 - \log 3\,606'6}{\log(1'039608)} = 7'06$
El capital fué invertido durante 7 años

2. Anualidades de capitalización

Un ejemplo particular de operacion financiera a interés compuesto es la denominada **anualidad de capitalizacion**. En este procedimiento, el cliente deposita cada principio de año una cantidad fija (la anualidad de capitalizacion) en la entidad financiera, que no retira hasta el fin del plazo acordado, de manera que al cabo del mismo ha producido un capital acumulado.

Suponiendo que la anualidad de capitalizacion es a y que el plazo acordado es t años, utilizando la fórmula del interés compuesto, tenemos que:

Final del año	Montante
1	$a(1+r)$
2	$a(1+r)^2 + a(1+r)$
3	$a(1+r)^3 + a(1+r)^2 + a(1+r)$
...	...
t	$a(1+r)^t + \cdots + a(1+r)^2 + a(1+r)$

Los montantes en años consecutivos forman una progresión geométrica de razón $(1+r)$. Aplicando la fórmula de la suma de los t primeros términos de una progesión geométrica obtenemos el capital al cabo de t años $\left(S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}\right)$:

$$C = \frac{a(1+r)^t(1+r) - a(1+r)}{(1+r)-1}$$

$$\boxed{C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r}}$$

En general, cuando los pagos los hacemos n veces al año, el capital obtenido es:

$$\boxed{C = \frac{a\left(1+\dfrac{r}{n}\right)\left[\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^T - 1\right]}{\dfrac{r}{n}}}$$

siendo T el número de peíodos de capitalización.

<u>Ejemplos</u>: página 105 del libro.

3. Anualidades de amortización

Otro caso práctico es la amortización de préstamos. Normalmente, cuando se solicita un crédito a un banco se establece un plazo de amortización (vencimiento) para el mismo de varios años, durante los cuales el prestatario va devolviendo parte del crédito al tiempo que abona los intereses.

Por tanto, según se devuelve el crédito, se va reduciendo el capital prestado, y (si se mantiene el rédito) también los intereses.

Las **anualidades de amortización** son pagos o aportaciones fijas que hacemos al final de cada año, para amortizar o cancelar una deuda, junto con sus intereses compuestos, durante un año determinado, t, de años.

La deuda, D, al cabo de t años, al tanto por uno anual, r, capitaliza el siguiente montante: $M = D(1+r)^t$.

Las anualidades, a, que pagamos al finalizar cada año son cantidades fijas, por tanto, si el primer año pagamos una cantidad a, también estamos cancelando los intereses que produciría esa cantidad durante los años de préstamo que faltan por pagar. Es decir, al realizar el primer pago hemos cancelado un total de $a(1+r)^{t-1}$ del montante,

Número de pago	Deuda cancelada
1	$a(1+r)^{t-1}$
2	$a(1+r)^{t-2}$
3	$a(1+r)^{t-3}$
$\cdots$	$\cdots$
t	a

La suma de todas esas cancelaciones tiene que ser igual al montante, $M = D(1+r)^t$:

$$D(1+r)^t = \underbrace{a + a(1-r) + \cdots + a(1+r)^{t-2} + a(1+r)^{t-1}}_{\text{p.g. de razón (1+r), } a_n = a(1+r)^{n-1}}$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \Rightarrow S_t = \frac{a(1+r)^{t-1}\cdot(1+r) - a}{(1+r)-1} = \frac{a\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} \Rightarrow D(1+r)^t = \frac{a\left[(1+r)^t - 1\right]}{r}$$

$$\boxed{a = \frac{Dr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1}}$$

En general, cuando los pagos los hacemos n veces al año, la cuota de amortización es:

$$\boxed{a = \frac{D \cdot \frac{r}{n}\left(1+\frac{r}{n}\right)^T}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^T - 1}}$$

siendo T el número de peíodos de amortización.

Ejemplos: página 107 del libro.